第12講　ベクトルと平面図形

PART1　等式を満たす点の位置

例題

△ABC と点 P が $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。

Point Pickup

練習

$\triangle$ABC と点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。

第12講　PART1 確認問題

1　平面上の △ABC と点 P が，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たしている。直線 AP と直線 BC の交点を Q とするとき，

BQ：QC＝［ア］：［イ］

AP：PQ＝［ウ］：［エ］

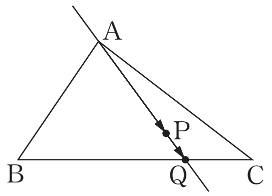
である。

第12講　ベクトルと平面図形

PART1　等式を満たす点の位置

例題

△ABC と点Pが $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線APと直線BCの交点をQとする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。



$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}=\frac{7}{9}\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

$\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$ は，点Aを始点とし線分BCを5：2に内分する点の位置ベクトルである。

3点A，P，Qは一直線上にあり，点Qは直線BC上にあることから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$$

であり　BQ：QC＝5：2

また，$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AQ}$ より　AP：PQ＝7：2

(別解)

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{9}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}k\overrightarrow{AC}$$

点Qは直線BC上の点であるから

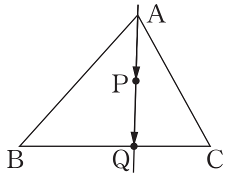
$$\frac{2}{9}k+\frac{5}{9}k=1 \qquad \text{よって} \quad k=\frac{9}{7}$$

したがって，$\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AP}$ より　AP：PQ＝7：2

また，$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$ より　BQ：QC＝5：2

練習

△ABC と点 P が $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。



$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{5}{10}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$$

$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ は，点 A を始点とし線分 BC を 3：2 に内分する点の位置ベクトルである。

3 点 A，P，Q は一直線上にあり，点 Q は直線 BC 上にあることから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

であり　BQ：QC＝3：2

また，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ より　AP：PQ＝1：1

（別解）

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{5}k\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}k\overrightarrow{AC}$$

点 Q は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{1}{5}k+\frac{3}{10}k=1 \qquad \text{よって} \quad k=2$$

したがって，$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AP}$ より　AP：PQ＝1：1

また，$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ より　BQ：QC＝3：2

第 12 講　PART1 確認問題 解答

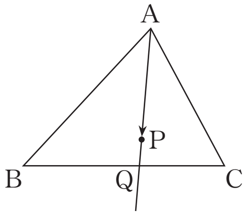
1　**[正解]** ア：3，イ：2，ウ：5，エ：1

[解説]

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$$



……①　[A] [B]

$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ は，点 A を始点とし，線分 BC を 3：2 に内分する点の位置ベクトルである。また，3 点 A，P，Q は一直線上にあり，点 Q は直線 BC 上にあることから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\quad ……②$$

となり

BQ：QC＝3：2

①，②より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$$ [C]

よって，AP：AQ＝5：6 であるから，

AP：PQ＝5：1

（別解）

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{k}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$$

点 Q は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{k}{3}+\frac{k}{2}=1$$ [D]

$$k=\frac{6}{5}$$

[A]　2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m：n$ に内分する点を P$(\vec{p})$ とすると，$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

[B]　3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とするとき，

$$\vec{p}=k\left(\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}\right)$$

（和が 1）

の形の式から，点 P の位置を線分 AB を内分または外分する点を用いて表すことができる。

[C]　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AQ}$ の式で表す。

[D]　点 P が直線 AB 上の点
$\Longleftrightarrow \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$\mathbf{BQ : QC = 3 : 2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　$\mathbf{AP : PQ = 5 : 1}$